
Méthodes variationnelles en optimisation de formes

Variational methods in shape optimization

Porteur du projet (Principal Investigator) : Bozhidar VELICHKOV - www.velichkov.it

I. Présentation du projet et rappel des objectifs annoncés

L'optimisation de forme s'intéresse à des problèmes d'optimisation dont la variable est un objet géométrique. On pourra avoir à l'esprit par exemple l'optimisation du fuselage d'un avion pour améliorer son aérodynamisme ou l'amélioration d'une structure mécanique pour maximiser sa résistance à des contraintes. Mathématiquement, ce type de contexte se modélise en calcul des variations par des problèmes dont les variables peuvent être aussi bien des domaines de l'espace euclidien. Dans le projet VARIFORM on avait comme objectif d'appliquer des techniques variationnelles issues de la théorie géométrique de la mesure dans l'analyse de ces objets.

Une première direction de recherche, **D.R.1**, concerne les problèmes d'optimisation de forme associés à des équations elliptiques sous conditions de Neumann sur la frontière libre. L'objectif est de prouver l'existence des formes optimales pour des problèmes associés aux valeurs propres du laplacien de Neumann.

La deuxième direction de recherche, **D.R.2**, concerne les formules de monotonie pour des problèmes d'optimisation spectrale. Les formules de monotonie sont une des approches puissantes pour l'étude de la régularité des problèmes à frontière libre. Un des principaux objectifs était de trouver une formule de monotonie et étudier la régularité des ensembles optimaux pour certaines fonctionnelles spectrales.

II. Déroulement du projet et résultats obtenus

D.R.1. La difficulté principale, dans le cas d'optimisation de formes avec conditions de Neumann, vient du fait qu'une suite maximisante peut avoir de fortes oscillations de la frontière libre. Ce phénomène a été observé dans le cadre des simulations numériques pour des problèmes d'optimisation de la résistance de structures mécaniques. Une des observations faites par l'équipe de Gregoire Allaire et Charles Dapogny est que l'introduction d'un paramètre aléatoire dans le problème diminue l'oscillation de la frontière. On a étudié les aspects théoriques des *problèmes d'optimisation de formes avec incertitudes* dans les papiers [P1] et [A1]. Cette ligne de recherche fera partie du projet ANR SHAPO [Pr2]. Les problèmes d'optimisation avec conditions de Neumann restent une thématique de recherche très difficile et plusieurs années seront nécessaires pour arriver à un théorème général d'existence. Un problème simplifié a été étudié par B.V., Dorin BUCUR et Giovanni FRANZINA dans le cadre de la visite [V7]. Ce problème est une des parties principales du projet de thèse [T2].

D.R.2. Une formule de monotonie, pour problèmes d'optimisation de formes avec conditions de Dirichlet, a été démontrée dans [A3]. Comme conséquence on a obtenu la régularité des formes optimales pour fonctionnelles spectrales sur contrainte de volume. La régularité des formes optimales pour fonctionnelles spectrales sur contrainte de périmètre était étudié dans [A5]. Une nouvelle méthode pour démontrer la régularité des frontières libres a été développée dans [A6]. Les résultats de [A6] sont à la base de la pré-proposition [Pr1].

Les publications [A2] et [A4] sont liées aux méthodes variationnelles étudiées dans le cadre de VARIFORM.

Visites dans le cadre du projet

- [V8] 08-31/01/2016. Università di Pisa. Collaboration avec Giuseppe BUTTAZZO [P1].
- [V7] 06-10/06/2016. S.I.S.S.A. (Trieste, Italie). Visite de B.V. et Dorin BUCUR dans le cadre d'un groupe de travail avec Giovanni FRANZINA.
- [V6] 09-13/05/2016. Max-Planck-Institut Leipzig. Collaboration avec Luca SPOLAOR [A6].
- [V5] 18-22/04/2016. Politecnico di Milano. Collaboration avec Ilaria FRAGALÀ [A4].
- [V4] 11-15/04/2016. Universität Zürich. Collaboration avec Annalisa MASSACCESI [A2].

- [V3] *04-08/04/2016*. Università degli Studi di Torino. Collaboration avec Susanna TERRACINI et Dario MAZZOLENI. Publications liées : [A4].
- [V2] *03-31/01/2016*. Università di Pisa. Collaboration avec Giuseppe BUTTAZZO [A1].
- [V1] *13-17/07/2015*. Università degli Studi di Torino. Collaboration avec Susanna TERRACINI et Dario MAZZOLENI. Publications liées : [A4].

III. Retombées, poursuite du projet

Publications dans le cadre du projet

- [P1] G. Buttazzo, B. Velichkov : *A shape optimal control problem and its probabilistic counterpart*. Preprint 2017.
- [A6] L. Spolaor, B. Velichkov : *An isoperimetric inequality for the regularity of some free boundary problems : the 2-dimensional case*. accepted Comm. Math. Pure. Appl.
- [A5] G. De Philippis, J. Lamboley, M. Pierre, B. Velichkov : *Regularity of minimizers of shape optimization problems involving perimeter*. J. Math. Pure. Appl. (2017).
- [A4] D. Bucur, I. Fragalà, B. Velichkov, G. Verzini : *On the honeycomb conjecture for a class of minimal convex partitions*. Trans. Amer. Math. Soc. (2017).
- [A3] D. Mazzoleni, S. Terracini, B. Velichkov : *Regularity of the optimal sets for some spectral functionals*. Geom. Funct. Anal. **27** (2017), 373–426.
- [A2] A. Massaccesi, E. Oudet, B. Velichkov : *Numerical Calibration of Steiner trees*. Appl. Math. Optim. (2017).
- [A1] J.C. Bellido, G. Buttazzo, B. Velichkov : *Worst-case shape optimization for the Dirichlet energy*. Nonlinear Analysis **153** (2017), 117–129.

Thèses de doctorat liées au projet

- [T1] Baptiste TREY (09/2016 - 09/2019) - co-encadré par Emmanuel RUSS et B.V.. Thèse financée par le projet LabEx Persyval LAB GeoSpec. Le projet de thèse de Baptiste TREY contient l'application des techniques, développés en [A6] dans le cadre de VARIFORM, à des problèmes spectrales d'optimisation des formes.
- [T2] François GENERAU (09/2017 - 09/2020) - co-encadré par Edouard OUDET et B.V.. Thèse financée par ENS. Le projet de thèse de François GENERAU contient l'étude d'un problème à frontière libre avec conditions de Neumann.

Pré-propositions ANR 2018

suite aux résultats obtenus dans le cadre de VARIFORM

- [Pr1] Pré-proposition JCJC VAREG "Approche variationnelle à la régularité des frontières libres". PI : Velichkov, durée : 2 ans, 100kE.
- [Pr2] Pré-proposition PRC SHAPO "Shape Optimization". PI : Jimmy LAMBOLEY, PR Paris 6, Responsable pour le partenaire Grenoble : Velichkov, durée : 4 ans, 400kE.

IV. Bilan de l'utilisation des moyens alloués

- Dépenses de fonctionnement (missions, visites et invitations) : 10kE
- Matériel informatique : 5kE

V. Diffusion des résultats et valorisation

Interventions à des conférences

sur les résultats obtenus dans le cadre de VARIFORM.

- [C8] *Variational approach to the regularity of optimal sets*. "VII Partial differential equations, optimal design and numerics", Benasque (20/08-01/09/2017).
- [C7] *On the honeycomb conjecture for a class of minimal convex partitions*. "Transport problems in Zurich", Zurich (24-26/04/2017).
- [C6] *An isoperimetric inequality approach to the regularity of the free boundaries*. "Shape Optimization and Isoperimetric and Functional Inequalities", Luminy (21-25/11/2016).

- [C5] *An isoperimetric inequality approach to the regularity of the free boundaries.*
"GMT Shape Optimization and Free Boundaries", Trieste (25-28/10/2016).
- [C4] *Regularity of the optimal sets for spectral functionals.*
"XIII Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées", Iasi (25-29/08/2016).
- [C3] *Lipschitz regularity for quasi-minimizers and applications to some shape optimization problems.*
"Calculus of Variations, Geometric Measure Theory, Optimal Transportation : from Theory to Applications", Lion (4-8/7/2016).
- [C2] *Regularity of optimal sets for spectral functionals.* Workshop "Advances in Nonlinear Problems from Material Science and Shape Optimization", Pise (27-29/06/2016).
- [C1] *Regularity of optimal sets for spectral functionals.*
"Bru-To : Bruxelles-Torino PDE's Conference", Turin (2-5/5/2016).